

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 5

## Probabilités et statistiques



**5.1 Probabilités**

**5.2 Analyse combinatoire**

**5.3 Statistiques**

**5.4 Marche aléatoire en une dimension**

**5.5 Marche aléatoire en deux et trois dimensions**

- **Probabilité** : événement particulier  $A$  parmi  $\Omega$  événements possibles

$$p : A \subset \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \text{tel que} \quad p(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} \quad (5.1)$$

- **Axiomes de Kolmogorov** :

①  $0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall A$

②  $p(\Omega) = 1$

③  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \text{si} \quad p(A \cap B) = 0 \quad \forall A, B$

- **Condition de normalisation** :

$$(5.2)$$

- **Probabilité du complément** : non événement  $A$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) \quad (5.3)$$

- **Probabilité de l'intersection** : événements  $A$  et  $B$

$$p(A \cap B) = p(A|B)p(B) = p(B|A)p(A) \quad (5.4)$$

- **Théorème de Bayes** : probabilité conditionnelle :  $A$  sachant  $B$

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \quad (5.5)$$

- **Valeur moyenne (espérance)** : variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(5.6)$$

- **Variance** : variable aléatoire  $X$

$$(5.7)$$

- **Ecart-type** : variable aléatoire  $X$

$$(5.10)$$

- **Fonction de répartition de probabilité** : variable aléatoire continue  $X$

$$p(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \quad (5.11)$$

- **Condition de normalisation** : densité de probabilité  $f_X(x)$

$$(5.12)$$

- **Valeur moyenne** : variable aléatoire continue  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(5.13)$$

- **Variables aléatoires indépendantes** :  $X_1, \dots, X_n$

$$(5.14)$$

- **Densités de probabilité** : variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) \quad (5.15)$$

- **Permutations** :  $n$  éléments discernables

(5.16)

- **Arrangements avec répétition** :  $k$  éléments discernables parmi  $n$

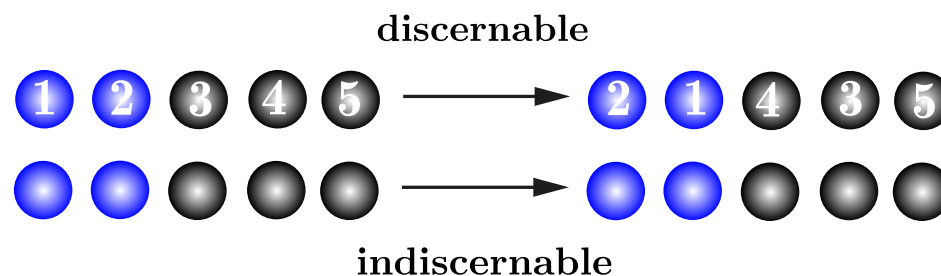
(5.17)

- **Arrangements sans répétition** :  $k$  éléments discernables parmi  $n$

(5.18)

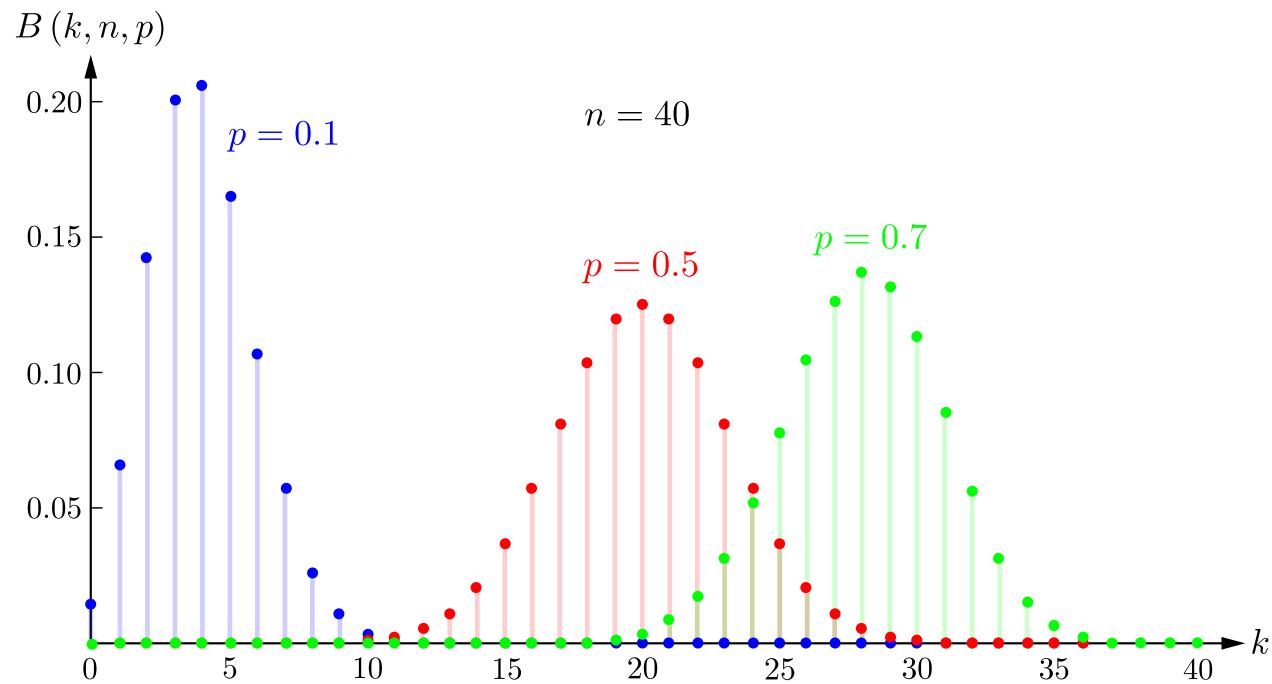
- **Combinaisons** :  $k$  éléments indiscernables parmi  $n$

(5.19)



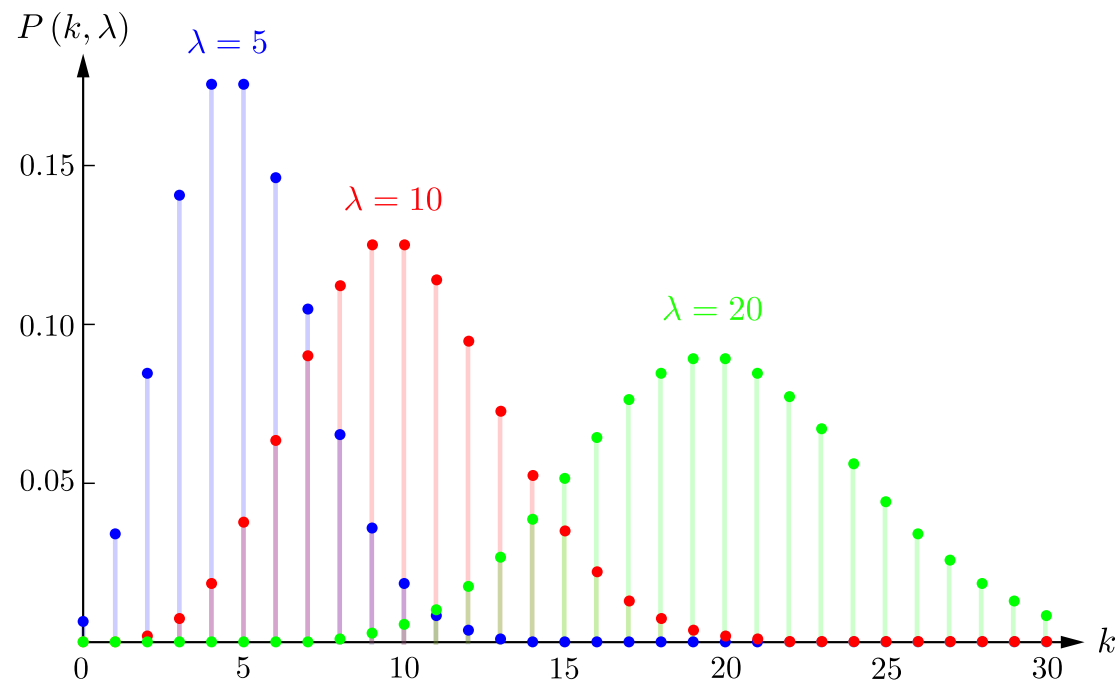
- **Loi binomiale** :  $n$  expériences aléatoires avec  $k$  succès de probabilité  $p$   
variable aléatoire **discrète**  $X$  nombre de succès :  $\Omega \rightarrow \mathbb{N}$

$$(5.20)$$



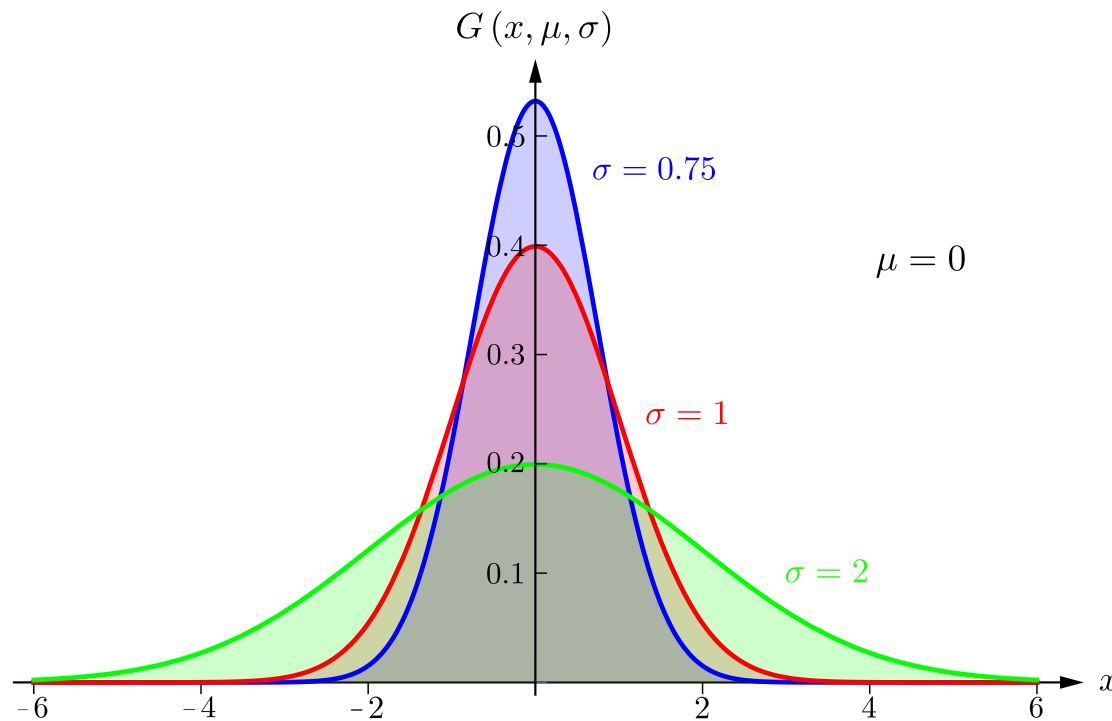
- **Loi de Poisson** :  $k$  événements pour une moyenne de  $\lambda$  événements  
variable aléatoire **discrète** nb. d'événement  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

(5.22)

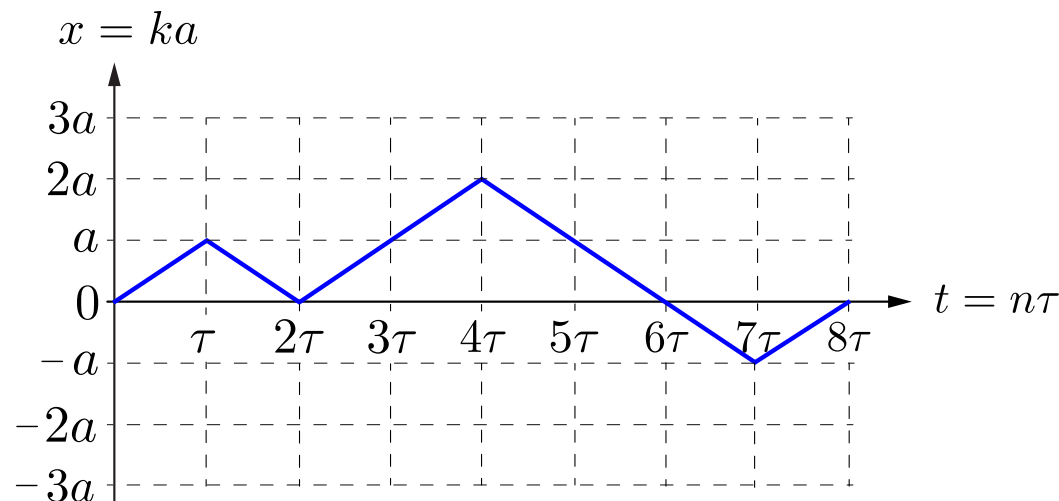


- **Loi normale** : résultat aléatoire  $x$  de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$   
variable aléatoire **continue** résultat  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

(5.24)



- **Marche aléatoire asymétrique (1D)** : réseau discret
  - **Arrête du réseau** :  $a \in \mathbb{R}_+$
  - **Intervalle de temps** :  $\tau \in \mathbb{R}_+$
  - **Temps** :  $t = n\tau$  où  $n \in \mathbb{N}$
  - **Position** :  $x = ka$  où  $k \in \mathbb{Z}$
  - **# Déplacements à droite** :  $d$  de probabilité  $p \in (0, 1)$
  - **# Déplacements à gauche** :  $g$  de probabilité  $q = 1 - p$
  - **# Etapes** :  $n = d + g$  au temps  $t$
  - **# Sites** :  $k = d - g \in \mathbb{N}$  au temps  $t$



- **Marche aléatoire asymétrique (1D)** : réseau discret

- # Déplacements à droite :  $d = \frac{n+k}{2}$  de probabilité  $p$

- # Déplacements à gauche :  $g = \frac{n-k}{2}$  de probabilité  $q = 1 - p$

- **Loi binomiale** : probabilité de présence de la particule en position  $x = ka$  au temps  $t = n\tau$

$$(5.37)$$

- **Loi binomiale** : probabilité de  $d$  déplacements de la particule vers la droite de probabilité individuelle  $p$  à l'étape  $n$

$$B(d, n, p) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d} = \frac{n!}{d!g!} p^d q^g \quad (5.38)$$

$$= \frac{n!}{(n-g)!g!} (1-q)^{n-g} q^g = B(g, n, q)$$

- **Loi binomiale** : représentation intégrale

$$(5.39)$$

- **Démonstration** : où  $n + k = 2d$

$$\begin{aligned}
 p(k, n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi (p e^{i\varphi} + q e^{-i\varphi})^n e^{-ik\varphi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left( \sum_{d=1}^n \frac{n!}{d! (n-d)!} p^d q^{n-d} e^{-i(n-2d)\varphi} \right) e^{-ik\varphi} \\
 &= \sum_{d=1}^n \frac{n!}{d! (n-d)!} p^d q^{n-d} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-i(n+k-2d)\varphi} \quad (5.40) \\
 &= \sum_{d=1}^n \frac{n!}{d! (n-d)!} p^d q^{n-d} \delta_{n+k, 2d} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \\
 &= \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} = B(d, n, p) \quad \square
 \end{aligned}$$

- **Marche aléatoire symétrique (1D)** : où  $p = q = \frac{1}{2}$  et  $n$  pair (5.41)

$$\begin{aligned}
 p(k, n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^n e^{-ik\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \varphi)^n e^{-ik\varphi} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{n \ln |\cos \varphi|} e^{-ik\varphi} d\varphi \tag{5.43}
 \end{aligned}$$

- **Représentation intégrale** : où  $x = ka$  et  $t = n\tau$  et  $\varphi = \sqrt{\tau} \phi$   
 $a = \sqrt{2D\tau}$

$$\begin{aligned}
 p\left(\frac{x}{a}, \frac{t}{\tau}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\varphi)|} e^{-i \frac{x}{a} \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\sqrt{\tau} \phi)|} e^{-i \frac{x}{a} \sqrt{\tau} \phi} d\phi \tag{5.46} \\
 &= \frac{a}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\sqrt{\tau} \phi)|} e^{-i \frac{x}{\sqrt{2D}} \phi} d\phi
 \end{aligned}$$

- **Densité de probabilité** : limite du continu :  $a \rightarrow 0$  et  $\tau \rightarrow 0$

$$f(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p\left(\frac{x}{a}, \frac{t}{\tau}\right)}{a} \quad (5.47)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\sqrt{2D}} \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}} e^{\frac{t}{\tau} \ln |\cos(\sqrt{\tau} \phi)|} e^{-i \frac{x}{\sqrt{2D}} \phi} d\phi \quad (5.48)$$

- **Développement limité** : 2<sup>e</sup> ordre en  $\sqrt{\tau} \phi$

$$\ln |\cos(\sqrt{\tau} \phi)| \simeq \ln \left| 1 - \frac{1}{2} \tau \phi^2 \right| \simeq -\frac{1}{2} \tau \phi^2 \quad (5.49)$$

- **Densité de probabilité** :

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2} \phi^2} e^{-i \frac{x}{\sqrt{2D}} \phi} d\phi \quad (5.50)$$

- **Intégrale** : où  $A = \frac{t}{2}$  et  $B = -i \frac{x}{\sqrt{2D}}$  (5.51)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2 + B\phi} d\phi = e^{\frac{B^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(\phi - \frac{B}{A})^2} d\phi \quad (5.52)$$

- **Changement de variable :**

$$z = A \left( \phi - \frac{B}{A} \right)^2 \quad \text{ainsi} \quad dz = 2A \left( \phi - \frac{B}{A} \right) d \left( \phi - \frac{B}{A} \right)$$

$$d \left( \phi - \frac{B}{A} \right) = \frac{z^{-1/2}}{2\sqrt{A}} dz \quad (5.54)$$

- **Intégrale d'une gaussienne :** (5.52) et (5.54)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2 + B\phi} d\phi &= e^{\frac{B^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(\phi - \frac{B}{A})^2} d\phi \\ &= 2 e^{\frac{B^2}{4A}} \int_0^{\infty} e^{-A(\phi - \frac{B}{A})^2} d \left( \phi - \frac{B}{A} \right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$= \frac{e^{\frac{B^2}{4A}}}{\sqrt{A}} \int_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-z} dz = \frac{e^{\frac{B^2}{4A}}}{\sqrt{A}} \Gamma \left( \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

- **Intégrale d'une gaussienne :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\phi^2+B\phi} d\phi = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}} \quad (5.55)$$

- **Coefficients :**

$$A = \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad B = -i \frac{x}{\sqrt{2D}} \quad (5.51)$$

- **Intégrale d'une gaussienne :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}\phi^2} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2D}}\phi} d\phi = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (5.56)$$

- **Loi normale :** moyenne  $\mu = 0$  et variance  $\sigma^2 = 2Dt$

$$(5.57)$$

- **Condition de normalisation :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 1 \quad (5.30)$$

- **Densité de probabilité initiale** : (5.56) avec  $t = 0$  (5.60)

$$f(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{x}{\sqrt{2D}} \phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i k' x} dk' = \delta(x)$$

- **Position moyenne** : intégrant (produit de fonctions impaire et paire)

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 0 \quad (5.61)$$

- **Fluctuations** : variable aléatoire position (variance)

$$\sigma^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t) dx \quad (5.62)$$

$$= \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{4Dt} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} d\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 e^{-\eta^2} d\eta = 2Dt$$

- Dérivée temporelle de la densité de probabilité : (5.57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi D t^{1/2}}} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D t^{1/2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left( -\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2} \right) \end{aligned} \quad (5.63)$$

- Dérivée spatiale première de la densité de probabilité : (5.57)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t^{1/2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi D t^{1/2}}} \frac{x}{2Dt} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (5.64)$$

- Dérivée spatiale seconde de la densité de probabilité : (5.57)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi D t^{1/2}}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{x}{2Dt} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D t^{1/2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left( -\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

- **Equation de la diffusion** : densité de probabilité (1D)

$$(5.66)$$

- **Densité de probabilité** : marche aléatoire symétrique (1D)

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (5.57)$$

- **Densité de probabilité** : marche aléatoire symétrique (2D)

$$(5.68)$$

Les densités de probabilités de se déplacer selon les trois dimensions sont indépendantes et identiquement distribuées.

- **Equation de la diffusion** : densité de probabilité (2D)

$$(5.72)$$

- **Densité de probabilité** : marche aléatoire symétrique (2D)

$$f(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \quad (5.68)$$

- **Densité de probabilité** : marche aléatoire symétrique (3D)

(5.74)

Les densités de probabilités de se déplacer selon les trois dimensions sont indépendantes et identiquement distribuées.

- **Equation de la diffusion** : densité de probabilité (3D) (5.78)

- **Densité de probabilité** : (3D) :  $f(\mathbf{r}, t) = f(x, y, z, t)$

(5.79)

- **Equation de la diffusion** : densité de probabilité (3D)

(5.81)